数論的な体に対する準高次 Kummer 忠実性

北海道大学 大学院理学院 数学専攻
山村恵晃 (Yoshiaki YAMAMURA) *

概要

遠アーベル幾何学において, Kummer 忠実体は基礎体に適していることが期待されている. 近年, 小関–田口は Kummer 忠実体を Galois 表現的に特徴付けることを目的として (準) 高次 Kummer 忠実体を定義したとともに, 劣 p 進体は準高次 Kummer 忠実か? という自然な問題を提唱した. 筆者はこの問題を肯定的に解決した. さらに, 標数が 0 の高次元局所体の準高次 Kummer 忠実性について考察した. 本稿では, それらの過程で得られたいくつかの結果を紹介する.

導入

KF (resp. HKF, resp. QHKF, resp. HLF) は Kummer 忠実 (resp. 高次 Kummer 忠実, resp. 準高次 Kummer 忠実, resp. 高次元局所体) を表すものとする. ここで, KF, HKF, QHKF は体に関する性質である.

遠アーベル幾何学は, 適切な代数多様体のエタール基本群から元の多様体の幾何構造および代数構造までを復元できるであろう, という Grothendieck 予想により始まった. 当初, 多様体の基礎体としては有理数体上の有限生成体が適していると思われてきたが, 1 次元の場合の Grothendieck 予想の解決に伴い, 基礎体を劣 p 進体 (cf. §0) とする p 進的な解釈が望月によりなされた. さらに, 近年では, KF 体 (cf. [5, Definition 1.5]) という Kummer 理論が遠アーベル幾何における復元について有効に働くような体を基礎体とする理論へと拡張されつつある. とくに, 劣 p 進体は KF であることに注意する (cf. [5, Remark 1.5.4]). 実際に, 星によって, KF 体上のアフィン双曲的代数曲線に対する Grothendieck 予想が証明されている (cf. [2]). 現在では, KF 体は遠アーベル幾何における基礎体として適していることが期待されている. これにより, Grothendieck の想定より遥かに多くの体が基礎体として適していることがわかってきた. しかし, 劣 p 進体でない KF 体を見つけることは必ずしも容易ではない. 近年, 無限次代数体における KF 性の判定条件を与えることができる体として小関–田口により, HKF 体および QHKF 体が定義された (cf. [8], 定義 1.1). これらの体は KF 体の variant であり, KF 性を Galois 表現的に特徴づけようとする試みで導入されたと思われ, 数論において有用なものと考えられている. その一例として, HKF 体の分岐理論的特徴付けが挙げられる. 例えば, k を代数体とするとき, 分岐が至るところで有限であるような k の Galois 拡大体は HKF になることが知られている. この応用として, k 上の半 abel 多様体 B と正の整数 n を固定し, 素数 p に対して, B

* E-mail: yamamura.yoshiaki.x5@elms.hokudai.ac.jp

の p^n 等分点の座標を全て添加して得られる拡大体は HKF であることがわかる．また, 代数体 k 上の Galois 拡大 K について, K に含まれる k の任意の有限次拡大 k' に対して K における k' 上の最大 abel 部分拡大の分岐指数が有限ならば, K は HKF であることがわかっている．さらに, HKF 体, QHKF 体, KF 体, 劣 p 進体の 4 つの概念の間の関係もある程度明らかになっている．しかし, 一般に, 劣 p 進体は HKF にはならない．したがって, 劣 p 進体が QHKF になるか? という自然な問題が生じた．この問題は [8] において提唱されたものである．筆者はこの問題を肯定的に解決した．

さらに, 筆者は KF 性と QHKF 性がどの程度類似しているか, ということに関心がある．近年, 室谷によって, HLF (cf. 定義 3.1) に対する KF 性の判定がなされた (cf. [7], 定理 3.3)．これにより, 剰余体の標数が正の HLF は KF であり, 剰余体の標数が 0 の HLF は KF になり得ないことが明らかになった．筆者はこの性質の QHKF 体における類似について考察した．具体的には, 標数 0 の HLF が QHKF になりうるいくつかの “証拠” を提示する．本稿では, 上記の考察の過程で得られたいくつかの結果を紹介する．

次に, 本稿で用いる略記および, 体とその性質の関係について記述する．

略記:

- “PLF” は “positive-characteristic local field” (cf. §0),
- “MLF” は “mixed-characteristic local field” (cf. §0),
- “HLF” は “higher local field”(cf. 定義 3.1),
- “PHLF” は “positive-characteristic higher local field” (cf. 定理 3.2),
- “MHLF” は “mixed-characteristic higher local field” (cf. 定理 3.2),
- “PFHLF” は “positive-first-residue-characteristic higher local field” (cf. 定理 3.2),
- “ZFHLF” は “zero-first-residue-characteristic higher local field” (cf. 定理 3.2),
- “CDVF” は “complete discrete valuation field”,
- “KF” は “Kummer-faithful” (cf. [5, Definition 1.5]),
- “QHKF” は “quasi-highly Kummer-faithful” (cf. 定義 1.1),
- “HKF” は “highly Kummer-faithful” (cf. 定義 1.1)

の略記である．

まとめ:

体とその性質の関係についてまとめておく．k を体とする．$(*)$ は k が $*$ であることを表す．このとき, k に対して, 次の図式のような体とその性質の関係がある (cf. §0, 1, 2, 3):

$$\begin{tikzcd}
\textbf{(PLF)} \arrow[r, Rightarrow] & \textbf{(PHLF)} \arrow[r, Rightarrow] & \textbf{(PFHLF)} \arrow[r, Rightarrow] & \textbf{(HLF)} \arrow[r, Rightarrow] & \textbf{(CDVF)} \\
\textbf{(MLF)} \arrow[r, Rightarrow] & \textbf{(MHLF)} \arrow[ur, Rightarrow] & \textbf{(ZFHLF)} \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
\textbf{(劣 p 進体)} \arrow[r, Rightarrow, "{[5]}"] \arrow[dr, Rightarrow, "\text{定理 2.5}"'] & \textbf{(KF)} & \textbf{(MHLF)} \arrow[l, Rightarrow, "{[7]}"'] \arrow[dl, Rightarrow, "\text{? (cf. 命題 3.4)}"] \\
\textbf{(HKF)} \arrow[r, Rightarrow, "\text{自明}"'] & \textbf{(QHKF)} \arrow[u, Rightarrow, "{[8]}", "(\star)"'] & \textbf{(ZFHLF)} \arrow[l, Rightarrow, "\text{? (cf. 命題 3.4)}"]
\end{tikzcd}
$$

ただし, $(\star)$ では, k はある標数 0 の KF 体上の Galois 拡大となることを仮定する.

0　記号と用語

記法:

体 k に対して,

- 絶対 Galois 群を G_k,
- 代数閉包を $\overline{k}$,
- perfection を k^{perf},
- 標数を $\mathrm{char}\, k$,
- k 上の有理関数体を $k(t)$,
- $k(t)$ の t 進完備化を $k(\!(t)\!)$,
- k 上のスキーム X に対して, ベースチェンジ $X \times_{\mathrm{Spec}\, k} \mathrm{Spec}\, \overline{k}$ を $X_{\overline{k}}$,
- k が CDVF のとき, その剰余体を $\underline{k}$,
- k が完全かつ標数が正のとき, Witt 環を $W(k)$

とかく.

体:

素数 p と正の整数 n に対して,

- $\mathbb{Q}$ は有理数体,
- $\mathbb{Q}_p$ は $\mathbb{Q}$ の p 進完備化,
- $\mathbb{F}_{p^n}$ は位数 p^n の有限体

を表す. ある素数 p が存在して, $\mathbb{Q}_p$ (resp. $\mathbb{F}_p(\!(t)\!)$) の有限次拡大体と同型な体を MLF (resp. PLF) という. $\mathbb{Q}_p$ 上の有限生成体の部分体と同型な体のことを劣 p 進体という. $\mathbb{Q}_p(r)$ は $\mathbb{Q}_p$ の Tate ひねりを表す.

代数多様体:

代数多様体は, 体上の分離的かつ幾何的整な有限型スキームとする.

G 加群:

群 G がベクトル空間 V に作用しているとき, V^G (resp. V_G) は V の G による不変部分 (resp. 余不変部分) を表す.

エタールコホモロジー:

体 k 上の有限型スキーム X と素数 $\ell \neq \mathrm{char}\, k$ に対して, $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)$ を ℓ 進エタールコホモロジーとする. さらに, k が剰余体を持つならば (e.g. k が CDVF), ℓ 進エタールコホモロジーは $\ell \neq \mathrm{char}\, \underline{k}$ を仮定していることに注意する. $\ell = \mathrm{char}\, \underline{k}$ のときは, p 進エタールコホモロジーという. G_k の元が定める $X_{\overline{k}}$ の自己同型の引き戻しによって, ℓ 進と p 進エタールコホモロジーに G_k が作用する.

1　HKF 体と QHKF 体の定義と性質

定義 1.1 ([8, Definition 2.6])**.** k を体とし, $p_k \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{char}\, k$ とおく. このとき, k に対して, 次の条件を考える:

$(\dagger)_{i,r}$ 任意の k の有限次拡大 k_H, 任意の k_H 上の固有かつ滑らかな多様体 X, $\ell \neq p_k$ をみたす任意の素数 ℓ に対して, $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(r))_H = 0$ が成り立つ. ただし, $H \overset{\mathrm{def}}{=} G_{k_H}$ とする.

(i) 任意の $0 < i \leq 2\dim X$ に対して, 条件 $(\dagger)_{i,0}$ をみたすとき, k が **pre-QHKF** であるという.
(ii) $i \neq r$ をみたす任意の i, r に対して, 条件 $(\dagger)_{i,r}$ をみたすとき, k が **pre-HKF** であるという.
(iii) k が完全かつ pre-QHKF であるとき, k が **QHKF** であるという.
(iv) k が完全かつ pre-HKF であるとき, k が **HKF** であるという.

Poincaré 双対より,

$$(H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(r))_H)^\vee \cong (H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(r))^\vee)^H \cong H^{2d-i}(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(d-r))^H$$

が成り立つことに注意する. ただし, (-)$^\vee$ は双対を表し, $d \overset{\mathrm{def}}{=} \dim X$ とおいた. 定義から, 直ちに次の性質が従う:

- HKF ならば QHKF である.
- HKF (resp. QHKF) 体の完全な部分体は HKF (resp. QHKF) である.
- HKF (resp. QHKF) 体の有限次拡大体も HKF (resp. QHKF) である.

HKF 体と QHKF 体は KF 体の variant として定義された. [5] と [8] において, KF 体, HKF 体, QHKF 体, 劣 p 進体の 4 つの概念の関係がある程度明らかになっている. 具体的には, [5] では劣 p 進体が KF であることが示され, [8] では標数 0 の KF 体上の Galois 拡大体に対しては QHKF ならば KF であることが示されている. さらに, MLF は HKF になり得ないこともわかっている. よって, 劣 p 進体は QHKF か? という問題は自然であるが, これは [8] において提唱された. この問題を解決するにあたり, 筆者はまず次の補題を証明した:

補題 1.2. K を体 k 上の有限生成体, X を K 上の固有かつ滑らかな多様体, $\ell \neq \mathrm{char}\, k$ を素数とする. このとき, k が条件 $(\dagger)_{i,r}$ をみたすならば,

$$H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell(r))_{G_K} = 0$$

が成り立つ.

注意 1.3. この補題より, 以降に記述する体 k 上の ℓ 進エタールコホモロジーと p 進エタールコホモロジーの不変部分と余不変部分の消滅に関する主張は, 全て k 上の有限生成体の部分体に対して成り立つ.

絶対 Galois 群は体の perfection をとっても変わらないことから, HKF 性と QHKF 性に関する次の性質を導くことができる:

命題 1.4. HKF (resp. QHKF) 上の有限生成体の perfection は HKF (resp. QHKF) である.

この命題より, 劣 p 進体が QHKF であることを証明するには MLF が QHKF であることを示せば十分であることがわかる.

2 MLF の QHKF 性

Jannsen はウェイト・モノドロミー予想と p 進ウェイト・モノドロミー予想が成り立つことを仮定すると, MLF 上の ℓ 進エタールコホモロジーの惰性群による不変部分の重さや p 進エタールコホモロジーの絶対 Galois 群による不変部分の計算を精密に行うことができることを [4] において示した. これら 2 つの予想が成り立つと仮定すると, Jannsen による計算結果, [4, Corollary 4.3, 5.2] を使うことにより, MLF が QHKF であるという主張は成り立つことがわかっている (cf. [8, Proposition 2.11]). この節では, 2 つの予想の成立を仮定せずとも MLF の QHKF 性が導けることを紹介する.

以下, この節では k を MLF または PLF とする. このとき,

- p を k の剰余体の標数,
- I_k を k の惰性群,
- ℓ を p と異なる素数

とする. さらに, X を k 上の固有かつ滑らかな多様体とし, d を X の次元とする.

実は, PLF の場合のウェイト・モノドロミー予想は伊藤によって解決されている (cf. [3]) ため, PLF は pre-QHKF である. 混標数の場合では, 低次元の場合や適切な仮定のもとで, ウェイト・モノドロミー予想は正しいことが知られているが, 一般には未解決である. よって, 混標数の場合を考えることが本質的である.

以下, ウェイト・モノドロミー予想と p 進ウェイト・モノドロミー予想の成立は仮定しない. この場合のエタールコホモロジーの不変部分の計算について, Jannsen による 2 つの結果を紹介する:

定理 2.1 ([4, Theorem 4.2])**.** 次の主張が成り立つ:

(i) $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)^{I_k}$ は混な $G_{\underline{k}}$ 表現であり, その重さは $[\max(0, 2i-2d), \min(2i, 2d+2)]$ に含まれる.

(ii) $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)_{I_k}$ は混な $G_{\underline{k}}$ 表現であり, その重さは $[\max(-2, 2i-2d), \min(2i, 2d)]$ に含まれる.

したがって, $r \notin [\max(0, i-d), \min(i, d+1)]$ に対して, $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(r))^{G_k} = 0$ が成り立つ.

以下, この節では k を MLF とする.

定理 2.2 ([4, Theorem 5.3])**.** $r \notin [\max(0, i-d), \min(i,d)]$ に対して,

$$H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_p(r))^{G_k} = 0$$

が成り立つ.

上記の計算結果では MLF 上のエタールコホモロジーの余不変部分の消滅を導くことはできない. まず, 筆者は Rapoport–Zink のウェイト・スペクトル系列 (cf. [9]) を用いることにより, 定理 2.1 の主張を強めた (混標数の場合だけ考えればよいことに注意する):

定理 2.3. 次の主張が成り立つ:

(i) $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)^{I_k}$ は混な $G_{\underline{k}}$ 表現であり, その重さは

$$\begin{cases} [\max(0, 2i-2d),\ \max(0, \min(2i-1, 2d-1))] & \text{if } i \neq 2d, \\ \{2d\} & \text{if } i = 2d, \end{cases}$$

に含まれる.

(ii) $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)_{I_k}$ は混な $G_{\underline{k}}$ 表現であり, その重さは

$$\begin{cases} \{0\} & \text{if } i = 0, \\ [\min(2d, \max(1, 2i-2d+1)),\ \min(2i, 2d)] & \text{if } i \neq 0, \end{cases}$$

に含まれる.

したがって, $i \neq 2d$ と $r \notin \left[\max(0, i-d),\ \frac{1}{2}\max(0, \min(2i-1, 2d-1))\right]$ に対して,

$$H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell(r))^{G_k} = 0$$

が成り立つ. とくに, $i \neq 0$ に対して, $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_\ell)_{G_k} = 0$ が成り立つ.

p 進の場合については, Mokrane の p 進ウェイト・スペクトル系列 (cf. [6]) を用いて, log クリスタリンコホモロジーの重さについて調べることにより, 定理 2.2 の主張を強めた:

定理 2.4. $i \neq 2d$ と $r \notin \left[\max(0, i-d),\ \frac{1}{2}\max(0, \min(2i-1, 2d-1))\right]$ に対して,

$$H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_p(r))^{G_k} = 0$$

が成り立つ. とくに, $i \neq 0$ に対して, $H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_p)_{G_k} = 0$ が成り立つ.

以上の筆者の結果 (命題 1.4, 定理 2.3, 2.4) より, 次の結論を得る:

定理 2.5. 劣 p 進体は QHKF である.

3 HLF に対する QHKF 性

劣 p 進体が QHKF であることにより, QHKF 体のクラスは KF 体のクラスとある程度近い関係にあることがわかる. よって, QHKF 性と KF 性はどの程度類似しているか, ということに関心がある.

近年, 室谷により, HLF に対する KF 性が研究され, その判定がなされた (cf. [7]). この節では, その QHKF 版の類似として HKF に対する QHKF 性について考察した結果を紹介する.

定義 3.1 (cf. [1, §1.1])**.** 体の列 $K = K^n,\ K^{n-1}, \cdots,\ K^1,\ K^0$ が存在して, 各 $0 \leq i \leq n-1$ に対して, K^{i+1} が CDVF, K^0 が有限体, $K^i = \underline{K}^{i+1}$ をみたすとき, K を n 次元 HLF という. このとき, K^{n-1} (resp. K^0) を K の first (resp. last) residue field という. さらに, ある整数 n が存在して, n 次元 HLF となる体を HLF という.

CDVF (k, v_k) に対して,

$$k\{\{T\}\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j T^j \,\middle|\, a_j \in k,\ \inf v_k(a_j) > -\infty,\ \lim_{j \to +\infty} v_k(a_j) = +\infty \right\}$$

と定める. $k\{\{T\}\}$ の付値 $v_{k\{\{T\}\}}$ は $v_{k\{\{T\}\}}(\sum a_j T^j) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \min v_k(a_j)$ で定める.

HLF は分類できることが知られている:

定理 3.2 (cf. [1, §1.1], 分類定理)**.** K を n 次元 HLF とし $p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{char}\, \underline{K}$ とする. このとき, K は次のいずれかと同型である:

(i) $\mathbb{F}_q(\!(T_1)\!) \cdots (\!(T_n)\!)$, ただし q は K の last residue field の位数とする.
(ii) $k\{\{T_1\}\} \cdots \{\{T_{n-1}\}\}$, ただし k は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大である.
(iii) $k\{\{T_1\}\} \cdots \{\{T_m\}\}(\!(T_{m+1})\!) \cdots (\!(T_{n-1})\!)$, ただし $n \geq 3$, $1 \leq m \leq n-2$, k は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大である.
(iv) $k(\!(T_1)\!) \cdots (\!(T_{n-1})\!)$, ただし $n \geq 2$, k は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大である.

HLF k が定理 3.2 の (i) (resp. (ii), resp. (i) または (ii), resp. (iii) または (iv)) と同型であるとき, k を **PHLF** (resp. **MHLF**, resp. **PFHLF**, resp. **ZFHLF**) という. HKF に対する KF 性について, 次の定理が知られている:

定理 3.3 ([7, Theorem 3.8])**.** PFHLF は pre-KF である. とくに, MHLF は KF である. ただし, pre-KF とは KF の定義から完全という条件を抜いたものである.

さらに, 剰余体の標数が 0 の CDVF は KF になり得ないことも知られている (cf. [7, Remark 3.9]). とくに, ZFHLF は KF ではないことに注意する. 筆者は定理 3.3 の QHKF 版の類似を考察し, MHLF や ZFHLF が QHKF になりうる "証拠" を提示した. すなわち, 次の命題が成り立つ:

命題 3.4. K を HLF とし, X を K 上の 1 次元の固有かつ滑らかな多様体とする. このとき, $i \neq 2$, $r \notin \left[\max(0, i-1),\ \frac{1}{2}\max(0, 2i-1)\right]$ と任意の素数 $\ell \neq \mathrm{char}\, K$ ($\ell = \mathrm{char}\, \underline{K}$ の場合も含む) に対して,

$$H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell(r))^{G_K} = 0$$

が成り立つ. とくに, $i \neq 0$ に対して, $H^i(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_\ell)_{G_K} = 0$ が成り立つ.

この命題の証明の過程で, かなり一般的な状況における p 進エタールコホモロジーの絶対 Galois

群による不変部分の消滅についての結果を得た. 次に記述する定理は [4, Theorem 5.3] や定理 2.4 の拡張である:

定理 3.5. k を CDVF とし, $\underline{k}$ は完全かつ $p \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{char}\,\underline{k} > 0$ とする. X を k 上の d 次元の固有かつ滑らかな多様体とする. このとき, $i \neq 2d$ と $r \notin \big[\max(0, i-d), \frac{1}{2}\max(0, \min(2i-1, 2d-1))\big]$ に対して,

$$H^i(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_p(r))^{G_k} = 0$$

が成り立つ.

この定理の "剰余体が完全である" という仮定は必ずしも必要とは限らないことに注意する (cf. 注意 1.3). 例えば, k が MHLF のとき,

$$\mathbb{Q}_p\{\{T_1\}\} \cdots \{\{T_{n-1}\}\} \subset W(\mathbb{F}_p(\!(T_1)\!) \cdots (\!(T_{n-1})\!)^{\mathrm{perf}})[1/p]$$

なので, 定理の結論と同様のことが成り立つ.

参考文献

[1] I. Fesenko and M. Kurihara, eds., *Invitation to higher local fields*, vol. 3 of Geometry & Topology Monographs, Geometry & Topology Publications, Coventry, 2000. Papers from the conference held in Münster, August 29–September 5, 1999.

[2] Y. Hoshi, *On the Grothendieck conjecture for affine hyperbolic curves over Kummer-faithful fields*, Kyushu J. Math., 71 (2017), pp. 1–29.

[3] T. Ito, *Weight-monodromy conjecture over equal characteristic local fields*, Amer. J. Math., 127 (2005), pp. 647–658.

[4] U. Jannsen, *Weights in arithmetic geometry*, Jpn. J. Math., 5 (2010), pp. 73–102.

[5] S. Mochizuki, *Topics in absolute anabelian geometry III: global reconstruction algorithms*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 22 (2015), pp. 939–1156.

[6] A. Mokrane, *La suite spectrale des poids en cohomologie de Hyodo-Kato*, Duke Math. J., 72 (1993), pp. 301–337.

[7] T. Murotani, *A study on anabelian geometry of higher local fields*, Int. J. Number Theory, 19 (2023), pp. 1229–1248.

[8] Y. Ozeki and Y. Taguchi, *A note on highly Kummer-faithful fields*, Kodai Math. J., 45 (2022), pp. 49–64.

[9] M. Rapoport and T. Zink, *über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik*, Invent. Math., 68 (1982), pp. 21–101.